第二次作业反馈：

1、 $\frac{\sin x}{x}$ 与 $x\sin\frac{1}{x}$ 的区别

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 为重要极限，其值为1

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$， $x\to 0$时 x为一无穷小量，$\sin\frac{1}{x}$为$[-1,1]$之间的一有界量. 无穷小量与有界变量的乘积仍为~~无~~无穷小量.

2. 分子分母有理化：

例如 1.2.1(26) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3})\quad 分子有理化$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot 5}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=\frac{5}{2}$$

3. 一个分段函数在某点极限是否存在.

首先 极限存在的判断是判断 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$是否等于$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,

并且是否等于一个数A，而与该点函数值 $f(x_0)$无关.

例如 1.2.2

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}\quad 求\lim_{x\to 0}f(x)$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ $\quad$ 二者不相等，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在

与$f(0)$的值无关，也不能说 $x\le 0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$， $x>0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

1.2.1 求以下极限

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-5}{x^2+x-8} \xlongequal[\text{同时除以}x^2]{\text{分子分母}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{8}{x^2}}$

$\xlongequal[\frac{1}{x}\to 0]{x\to\infty\text{即}} \lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{3-2\cdot\frac{1}{x}-5\cdot(\frac{1}{x})^2}{1+\frac{1}{x}-8\cdot(\frac{1}{x})^2} = \frac{3}{1} = 3$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) \xlongequal{\text{分子有理化}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$\xlongequal{\text{分子平方差公式}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} = \frac{2}{\infty} = 0$

(6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \xlongequal{\text{分子有理化}} \lim\limits_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)} \xlongequal[\text{有理化}]{\text{分母因式}\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\arctan\beta x}\ (\beta\neq 0)$ 知重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，在 $x\to 0$ 处 $\arctan x$ 与 x 为等价无穷小

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\arctan\beta x}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$

$\xlongequal[t=\alpha x,\ k=\beta x]{\text{换元}} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim\limits_{k\to 0}\frac{k}{\arctan k}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = 1\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta},\ (\beta\neq 0)$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $\underline{\underline{\text{二倍角公式}}}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\underline{\underline{\text{重要极限}}}$ $1\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^2 x}{2\arcsin x}$

知 $x\to 0$ 时，$\tan x$、$\arcsin x$ 均与 x 互为为等价无穷小

$\underline{\underline{\text{构造重要极限}}}$ 和等价无穷小 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\tan x\cdot\frac{\tan x}{x}}{2\cdot\frac{\arcsin x}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\tan x\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{1-0\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{x-4}$

知重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

$\underline{\underline{\text{构造}}}$ 重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{3}\cdot 3-4} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{3}\cdot 3}\cdot(1+\frac{3}{x})^{-4}$

$\underline{\underline{\text{换元}t=\frac{x}{3}}}$ $\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t\cdot 3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{-4} = e^3\cdot 1^{-4} = e^3$

(17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$

知 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\to\infty$

$\underset{\sec x=t}{\underline{\underline{\text{换元}}}}$ $\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t\cdot 3}$ $\underline{\underline{\text{重要极限}}}$ e^3

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$

知 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)$、e^x-1 均与 x 互为为等价无穷小

$\underset{\text{等价无穷小}}{\underline{\underline{\text{构造}}}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\ln(1-4x)}{-4x}}\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{1}\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

(23) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x)$

注意只有一个是重要极限，勿混淆

$-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ x 为 $x\to 0$ 的无穷小量

与有界变量的乘积也为无穷小量

$= \lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x})+1 = 0+1$

$= 1$

(24) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

$\underline{\underline{\text{合并分式}}}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

(26) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$

$\xlongequal[\text{有理化}]{\text{分子因式}\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}\xlongequal[\text{除以}\sqrt{n}]{\text{分子分母}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$

(27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

$\underline{\underline{\text{构造重要极限}}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)\cdot\frac{x}{2(x+1)}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x}{2(x+1)}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{2(1+\frac{1}{x})}}=e^{\frac{1}{2}}$

1.2.2 对下列给定函数,求指定的极限:

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leq 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

解:若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x=2 \\ x^2, & x\neq 2 \end{cases}$, 求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

解: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2=4=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

故 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$.

1.2.3. 当 $n\to\infty$ 时,若 $\sin^2\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^k}$ 为等价无穷小,则 $k=$?

解:由等价无穷小定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^k}}=1 \xlongequal[\frac{1}{n}=x]{\text{换元}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^k} \xlongequal{\text{重要极限}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^k}$$

$$=1^2\cdot\lim_{x\to 0}x^{2-k}=\lim_{x\to 0}x^{2-k}=1 \qquad \text{可知 } k=2.$$

1.2.6. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x<0 \\ k, & x=0 \\ \frac{\sin 2x}{x}, & x>0 \end{cases}$ 为连续函数，问 k 取何值？

解：$f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)$ 在 0 处连续，

即 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=k$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x+1)=2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin 2x}{2x}=2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2=k$，故 k 取 2

1.2.14. 人口学家考虑到人口增长受资源、环境等条件的制约，提出人口增长模型是 $P(t)=\frac{P_m}{1+Ce^{-kt}}$，$P(t)$ 是 t 时刻的人口数，P_m、C、k 均为正常数

(1) 试求极限人口数 $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.

(2) 某国家人口增长模型的常数 $P_m=275\times10^6$，$C=54$，$k=\ln 12/100$，

t 的单位是年，求 $t=0$，100 及 200 时该国的人口数.

解：(1) $P(t)=\frac{P_m}{1+Ce^{-kt}}$

$$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{P_m}{1+\frac{C}{e^{kt}}}=\frac{P_m}{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{C}{e^{kt}}}$$

$$\underline{\underline{k为正常数}}\ \frac{P_m}{1+0}=P_m$$

(2) $P_m=275\times10^6$，$C=54$，$k=\ln 12/100$

代入 $\Rightarrow P(t)=\frac{275\times10^6}{1+54\cdot e^{-\frac{\ln 12}{100}t}}$

$$P(0)=\frac{275\times10^6}{1+54\cdot e^0}=\frac{275\times10^6}{55}=5\times10^6$$

$$P(100)=\frac{275\times10^6}{1+54\cdot e^{-\ln 12}}=\frac{275\times10^6}{1+\frac{9}{2}}=5\times10^7$$

$$P(200)=\frac{275\times10^6}{1+54\cdot e^{-2\ln 12}}=\frac{275\times10^6}{1+\frac{3}{8}}=2\times10^8$$

1.2.15. 当某商品的调价通知下达后，有10%的市民听到此通知，2小时后，25%的市民知道这一消息，假定消息按规律 $y(t)=\frac{1}{1+Ce^{-kt}}$ 传播，其中 $y(t)$ 表示时刻t小时后知道这消息的人口比例，C与k均为正常数。

(1) 求 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$，并对结果做出解释。

(2) 多少小时后有75%的市民知道这一消息。

解：(1) $y(t)=\frac{1}{1+Ce^{-kt}}$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+Ce^{-kt}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{t\to+\infty} Ce^{-kt}}=\frac{1}{1+0}=1$$

即时间很久以后，全部的市民都知道了该消息

(2) 有75%的市民知道即 $y(t_0)=0.75=\frac{1}{1+Ce^{-kt_0}}$

需求出 C, k，而由已知有 $\begin{cases} y(0)=0.1 \\ y(2)=0.25 \end{cases}$

即 $\begin{cases} \frac{1}{1+C\cdot e^{0}}=0.1 \\ \frac{1}{1+C\cdot e^{-2k}}=0.25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9 \\ k=\frac{\ln 3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow y(t_0)=\frac{1}{1+9\cdot e^{-\frac{\ln 3}{2}t_0}}=\frac{3}{4} \Rightarrow t_0=6$.